9

KINEMATISCH-GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

HEBEDAUMEN UND EXCENTRIKS.

INAUGURAL-DISSERTATION,

WELCHE

MIT BEWILLIGUNG DER HOCHWÜRDIGEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

GEORGIA AUGUSTA ZU GÖTTINGEN

ZUR ERWERBUNG DER WÜRDE EINES

DOCTOR PHILOSOPHIAE ET MAGISTER LIBERALIUM ARTIUM

EHRERBIETIGST ÜBERREICHT

SAMUEL MARTIN SCHOENFLIES,

LEHRER AN DER KÖNIGL. PROVINZIAL-GEWERBESCHULE ZU POTSDAM.

BERLIN

GEDRUCKT BEI A. W. SCHADE (L. SCHADE)

1872.

Die kinematische Geometrie oder Geometrie der Bewegung, insbesondere der Relativbewegung, wird als Einleitung in die Kinematik oder Maschinengetriebslehre *) seit fünf Jahren von Herrn Prof. Aronhold an der Gewerbe-Akademie zu Berlin vorgetragen. Sie dient zwar zunächst den Zwecken der Maschinenlehre, indessen bietet sie auch dem Mathematiker neue und nicht zu unterschätzende Hülfsmittel dar für die Behandlung geometrischer Probleme, namentlich wenn dieselben in Form von Bewegungsaufgaben erscheinen. Man gelangt mit den Lehren der kinematischen Geometrie, vielfach ohne einen wesentlichen Aufwand von rechnerischem Apparat, schon durch die gegebenen Bewegungsbedingungen allein zur Bestimmung der

---

*) Ueber die Bedeutung der Kinematik für das wissenschaftliche System der Maschinenlehre siehe Reuleaux, Kinematische Mittheilungen in den „Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleifses in Preufsen“, Jahrgang 1871.

Tangenten, Normalen und der Krümmungsverhältnisse der Kurven; und es möchten daher die folgenden Untersuchungen, welche in Form von Problemen der Maschinenwissenschaft durchgeführt sind, auch für den Mathematiker insofern nicht ohne Interesse sein, als sie ein Beispiel liefern für die grofse Brauchbarkeit der kinematisch-geometrischen Methode in der genannten Richtung.

Potsdam, den 18. März 1872.

M. Sch.

Hebedaumen und Excentriks sind einfache Maschinentheile, welche dazu dienen, eine kontinuirlich rotirende Bewegung in eine hin und her gehende zu verwandeln. Die rotirende Bewegung ist dabei durch eine umlaufende Welle gegeben, die hin und her gehende, in der Regel von einer Stange auszuführende, soll meistens geradlinig, zuweilen auch in einem Kreisbogen erfolgen; doch ist in letzterem Falle der Radius im Verhältnifs zu dem Bogen, auf welchem die Bewegung stattfindet, so grofs, dafs sie vielfach ohne wesentlichen Fehler als eine geradlinige angesehen werden kann. Bei dieser Umwandlung der Bewegung sind zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich entweder veranlafst die rotirende Welle die Bewegung der Stange nur in der einen Richtung, während sie sich in der entgegengesetzten Richtung unabhängig von der rotirenden Welle und zwar meistens durch die Wirkung der Schwerkraft bewegt, oder die rotirende Welle veranlafst die Bewegung der Stange in den beiden Richtungen des Hin- und Hergangs.

Im ersteren Falle, der z. B. bei Pochstempeln stattfindet, wird die Welle an ihrem Umfange oder an einer auf ihr befestigten Scheibe mit Vorsprüngen oder Daumen von genügender Länge ausgestattet, welche einer nach dem andern die Stange erheben und in der höchsten Lage wieder frei lassen; im anderen Falle befestigt man auf der Welle eine runde oder unrunde Scheibe, welche Excentrik genannt und von der Stange in einem entsprechend gestalteten Theile fortwährend berührt wird. Die Untersuchung der Bewegung kann indessen in beiden Fällen in ganz gleicher Weise durchgeführt werden, wenn man nämlich im ersteren Falle die Bewegung nur von demjenigen Augenblicke an betrachtet, in welchem der Daumen die Stange erfaſst, bis zu demjenigen, in welchem er sie wieder frei läſst. Für beide Fälle handelt es sich darum, die relative Bewegung der Stange gegen die Welle festzustellen, und zwar ohne Rücksicht auf die sie veranlassenden Kräfte.

Es ist nun aber nicht einmal geboten, die relative Bewegung der Stange selbst zu bestimmen; man kann sich vielmehr auch vorstellen, ohne an den rein geometrischen Verhältnissen der Bewegung etwas zu ändern, daſs die Stange fest liege, und ein Punkt, z. B. der Angriffspunkt des Daumens oder des Excentriks, auf der Stange die Bewegung derselben besitze. Dann ist die relative Bahn des bewegten Punktes weiter nichts als die Form der Begrenzung, welche man dem vorgeschriebenen Bewegungsgesetz entsprechend dem Daumen oder dem Excentrik zu geben hat; und diese relative Bahn bleibt auch dann noch dieselbe, wenn man beiden bewegten Systemen, der Welle und der Stange, eine neue, gemeinsame Bewegung mittheilt. Giebt man nun beiden Systemen die entgegengesetzte Bewegung des einen, so kommt letzteres zur Ruhe, während die resultirende absolute Bewegung des anderen identisch ist mit seiner früheren relativen Bewegung gegen das erste System.

Hierdurch hat man aber das Problem der gleichzeitigen Bewegung zweier Systeme über oder in einander auf die Bewegung eines einzigen Systems in seiner eigenen Ebene zurück geführt, wenn, wie immer vorausgesetzt werden soll, alle Systeme, deren Untersuchung hier vorgenommen wird, in derselben Ebene liegen. Die Bewegung eines Systems in seiner eigenen Ebene kann man nun bekanntlich immer ersetzen durch das Rollen einer mit dem bewegten System fest verbundenen Kurve auf einer in der Ebene fest liegenden anderen Kurve. Diese beiden Kurven sind die Oerter der Momentan-Drehungsachsen oder der Pole in der bewegten und in der festen Ebene; sie werden Polkurve und Polbahn oder auch beide Polbahnen genannt; die Bahn eines jeden Punktes des bewegten Systems heifst Roulette.

Die beiden Polbahnen sind übrigens mit einander vertauschbar, d. h. man kann die Polbahn zur Polkurve und die Polkurve zur Polbahn machen, was schon daraus hervor geht, dafs bei der Zurückführung der beiden bewegten Systeme auf die Bewegung eines einzigen es gleichgültig ist, welches der bewegten Systeme zur Ruhe gebracht wird. Man wird hiernach in jedem einzelnen Falle zu einer Entstehungsart einer Kurve durch Rollung sofort noch eine zweite angeben können, indem man die Polbahnen mit einander vertauscht und dabei nur den Umstand beachtet, dafs der die Kurve schreibende Punkt in beiden Fällen demselben Systeme angehören mufs.

Die Polbahnen berühren sich in dem augenblicklichen Pol, haben also eine gemeinschaftliche Tangente und Normale; und da für die Dauer eines Zeitelements die Bewegung des Systems ersetzt werden kann durch eine Drehung um den augenblicklichen Pol, so ist die Verbindungslinie eines jeden Systempunktes mit dem Pole die Normale seiner Bahn, welche auch den Krümmungsmittelpunkt derselben enthält.

Für die Entfernungen r und r_1 eines Punktes A der Roulette und seines Krümmungsmittelpunktes M vom Pole $\mathfrak{P}$ gilt eine von Savary aufgestellte Beziehung, welche lautet:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) \sin \alpha = \frac{\omega}{U},$$

wenn α den Winkel zwischen AM und der gemeinschaftlichen Tangente der Polbahnen bezeichnet, ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Pol und

U die Wechselgeschwindigkeit des Poles. r und r_1 sind mit übereinstimmenden Vorzeichen zu versehen, wenn sie sich vom Pole aus nach entgegengesetzten Richtungen erstrecken; ω und U sind konstant in Bezug auf r und r_1, weil sie ganz unabhängig sind von der Lage des Systempunktes, und nur abhängig von derjenigen Bewegung, welcher das ganze System mit allen seinen Punkten unterworfen ist. Die obige Beziehung gilt aber nicht blofs für den Fall, dafs ein Punkt des bewegten Systems eine Roulette beschreibt, sondern auch dann, wenn eine Kurve des bewegten Systems eine Enveloppe umhüllt; hierbei hat man nur anstatt des Punktes A den Krümmungsmittelpunkt der Umhüllenden zu setzen, so dafs für eine Enveloppe r und r_1 die Entfernungen der Krümmungsmittelpunkte der Umhüllenden und Umhüllten vom Pole bedeuten *).

*) In seiner Vorlesung über „Kinematische Geometrie“ beweist Herr Prof. Aronhold den Satz von Savary folgendermafsen: Ist $a_1 b_1$ (Fig. 1) die Polbahn, ab die Polkurve, die im augenblicklichen Pol $\mathfrak{P}$ die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}T$ haben, ferner A der Krümmungsmittelpunkt der Umhüllenden und M der der Umhüllten, also $A\mathfrak{P} = r$ und $M\mathfrak{P} = r_1$, und sind endlich $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}\mathfrak{p}_1 = dS$ die zu den Kontingenzwinkeln $d\tau$ und $d\tau_1$ gehörenden Bogenelemente der Polbahnen, welche in der Zeit dt auf einander abrollen, so ist der unendlich kleine Winkel der beiden Graden $A\mathfrak{P}_1$ und $M\mathfrak{p}_1$, welche die nächstfolgenden Normalen werden:

$$d\vartheta = d\tau + d\tau_1.$$

Beschreibt man mit r als Radius um A einen Kreisbogen, welcher $A\mathfrak{P}_1$ in Q trifft, so ergiebt sich für die Polkurve aus dem Elementardreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 Q$:

$$r \,.\, d\tau = dS \,.\, \sin\alpha.$$

Auf dieselbe Weise findet man für die Polbahn:

$$r_1 \,.\, d\tau_1 = dS \,.\, \sin\alpha,$$

mithin:

$$d\tau = \frac{dS}{r} \sin\alpha \text{ und } d\tau_1 = \frac{dS}{r_1} \sin\alpha,$$

also:

$$\frac{d\vartheta}{dS} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) \sin\alpha.$$

Für jede Lage des Punktes A auf der Normalen $\mathfrak{P}A$ werden sich aus obiger Gleichung für r und r_1 zusammen gehörige Werthe ergeben. Es sei nun insbesondere angenommen, der Punkt A habe auf der Normalen $\mathfrak{P}A$ eine solche Lage und zwar in J, daſs sein Krümmungsmittelpunkt sich im Unendlichen befinde, also J ein Wendepunkt sei, und es bezeichne r_0 diese besondere Entfernung $\mathfrak{P}J$ des Punktes A vom Pole; dann ergiebt sich wegen $r_1 = \infty$, also $\frac{1}{r_1} = 0$ und mit $r = r_0$:

$$\frac{1}{r_0} \sin \alpha = \frac{\omega}{U},$$

mithin ist:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0},$$

wodurch die Lage des besonderen Punktes J auf $\mathfrak{P}A$ aus irgend zwei zusammen gehörigen Punkten M und A bestimmt ist und durch Konstruction, wie folgt, gefunden werden kann. Man verlängere $\mathfrak{P}A$ über A hinaus um sich selbst bis P (P soll der Gegenpunkt von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf A genannt werden), und bestimme zu P, $\mathfrak{P}$ und M den vierten harmonischen zu M zugeordneten Punkt. Dieser ist J, wovon man sich durch Aufstellung der harmonischen Proportion leicht überzeugen kann.

Die angegebene Konstruction kann nun auch umgekehrt dazu verwendet werden, um den Krümmungsmittelpunkt M irgend einer Roulette oder Enveloppe in einem Punkte A derselben zu finden, wenn der beson-

---

Nun ist aber:

$$U dt = dS,$$

und da $d\vartheta$ der Drehungswinkel des Systems für die Zeit dt ist,

$$\omega \,.\, dt = d\vartheta,$$

folglich $\frac{d\vartheta}{dS} = \frac{\omega}{U}$, womit die Richtigkeit der Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) \sin \alpha = \frac{\omega}{U}$$

erwiesen ist.

dere Punkt J auf der betreffenden Normalen bekannt sein sollte. Man hat dann nur nöthig, wieder zum Pol $\mathfrak{P}$ den Gegenpunkt P in Bezug auf A zu bestimmen und zu P, $\mathfrak{P}$ und J den vierten harmonischen zu J zugeordneten Punkt als den verlangten Krümmungsmittelpunkt zu konstruiren. Aus den gegenseitigen Lagenverhältnissen harmonischer Punktepaare ist klar, dafs M um so näher an J rückt, je mehr sich A von demselben und vom Pol $\mathfrak{P}$ entfernt, und dafs insbesondere $\mathfrak{P}$ in der Mitte zwischen J und M liegt, wenn A, also auch P in's Unendliche rückt. Dies letztere ist immer der Fall, wenn eine Gerade des bewegten Systems eine feste Kurve umhüllt.

Einen Punkt J wird es nun auf jedem durch den Pol $\mathfrak{P}$ geführten Strahl geben, also auch auf der gemeinschaftlichen Normalen $\mathfrak{P}N$ der beiden Polbahnen, welche in der Beziehung der Umhüllenden und Umhüllten zu einander stehen. Sei dieser besondere Punkt J mit J_0 bezeichnet und Wendepol genannt, so liefert, da hier $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, die Savary'sche Gleichung:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}J_0} = \frac{\omega}{U},$$

mithin ergiebt sich wegen $\frac{1}{\mathfrak{P}J} \sin\alpha = \frac{\omega}{U}$:

$$\mathfrak{P}J = \mathfrak{P}J_0 \,.\, \sin\alpha,$$

d. h. das Dreieck $\mathfrak{P}JJ_0$ ist ein bei J_0 rechtwinkliges; und daraus geht hervor, dafs der geometrische Ort der Punkte J auf allen durch den augenblicklichen Pol $\mathfrak{P}$ geführten Strahlen ein über $\mathfrak{P}J_0 = \frac{U}{\omega}$ als Durchmesser beschriebener Kreis ist, welcher die gemeinsame Tangente der Polbahnen in $\mathfrak{P}$ berührt. Die Peripherie dieses Kreises enthält also im betrachteten Augenblick diejenigen Punkte der verschiedenen Rouletten des Systems, deren Krümmungsmittelpunkte im Unendlichen liegen, und die daher Wendepunkte sind; der Kreis wird deshalb Wendekreis genannt, und er kann nicht nur dazu benutzt werden, um eine Roulette auf Wendepunkte zu untersuchen, sondern auch dazu, um für irgend einen Punkt des bewegten Systems den Krümmungsmittelpunkt zu konstruiren, weil ja die Normale des Bahnelements des betreffenden Punktes den Wendekreis in dem für diese Konstruction erforderlichen Punkte J schneidet. Dabei zeigt sich übrigens, dafs der Pol $\mathfrak{P}$ selbst Krümmungsmittelpunkt ist für die Bahnelemente aller Punkte der den Polbahnen gemeinsamen Tangente, denn für alle diese Punkte fällt J mit $\mathfrak{P}$, also nach den Gesetzen harmonischer Punkte auch M mit $\mathfrak{P}$ zusammen.

Da nun Polkurve und Polbahn mit einander vertauschbar sind, so giebt es auf der entgegengesetzten Seite der gemeinsamen Tangente der Polbahnen einen dem Wendekreis kongruenten und zu ihm symmetrisch gelegenen Kreis, welcher, mit Berücksichtigung der oben für das Vertauschen der Polbahnen gemachten Bemerkung, der Ort der Krümmungsmittelpunkte zu den Rouletten derjenigen Punkte sein mufs, die im bewegten System unendlich fern sind; er soll der Wendekreis der umgekehrten Bewegung genannt werden *).

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, das im Eingang aufgestellte specielle Problem der Hebedaumen und Excentriks insbesondere zu untersuchen. Die Bewegung der rotirenden Welle ist immer als gegeben anzunehmen, und erfolgt mit konstanter Winkel-

---

*) Die beiden Wendekreise, welche übrigens während der Bewegung ihre Lage und im allgemeinen auch ihre Gröfse ändern, wurden von Bresse gefunden; siehe: *Bresse, Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure; Journal de l'École polyt., cahier XXXV, pg. 104.*

geschwindigkeit; dagegen wird die Bewegung der Stange resp. des bewegten Punktes auf derselben verschieden verlangt, nämlich entweder gleichförmig oder gleichförmig verändert oder periodisch.

I. Die Bewegung der Stange ist gleichförmig.

Es sei O (Fig. 2) der Mittelpunkt der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirenden Welle, S die Stange, auf welcher sich der bewegte Punkt augenblicklich in A befindet; die Geschwindigkeit der Stange resp. des Punktes A sei c. Man gebe beiden bewegten Systemen eine Drehung um O mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich ω, aber ihr entgegengesetzt gerichtet; dadurch kommt die Welle zur Ruhe, und die Stange bewegt sich derartig, daſs sie stets den Abstand OB von O beibehält, also den Kreis vom Radius OB umhüllt, während der Punkt A gleichzeitig in ihrer Richtung gleitet. Der augenblickliche Pol findet sich in dem Durchschnittspunkt der Normalen zu den Bahnen zweier Punkte des bewegten Systems. Eine derselben ist der Radius OB selbst, die zweite ist das Perpendikel AD zur resultirenden Geschwindigkeit AE des Punktes A, welche sich zusammen setzt aus $AC = c$ in der Richtung von S und $AF = \omega \,.\, OA$ senkrecht zu OA. Beide Normalen OB und AD schneiden sich im Pol $\mathfrak{P}$, und es ergiebt sich jetzt aus den ähnlichen Dreiecken AEF und $AO\mathfrak{P}$:

$$O\mathfrak{P} : OA = c : \omega \,.\, OA,$$

und daher:

$$O\mathfrak{P} = \frac{c}{\omega} = \text{const.};$$

d. h. die Polbahn ist ein um den festen Punkt O mit dem Radius $R = \frac{c}{\omega}$ beschriebener Kreis K.

Zur Bestimmung der Polkurve gebe man beiden ursprünglichen Systemen eine Geschwindigkeit gleich c und ihr entgegengesetzt gerichtet, wodurch die Stange S resp. der Punkt A auf derselben zur Ruhe kommt, während die Welle sich um O dreht, und dieser Punkt selbst mit der ganzen Ebene die Translationsgeschwindigkeit c besitzt, sich also auf einer zur Stange S parallelen Geraden bewegt. Diese gleichzeitige Drehung und Verschiebung läſst sich ersetzen durch eine einfache Drehung um einen Pol, dessen Entfernung von O gleich $\frac{c}{\omega} = O\mathfrak{P}$ ist. Da nun die Länge $O\mathfrak{P}$ konstant bleibt, so befindet sich $\mathfrak{P}$ immer in derselben Entfernung von der jedesmaligen Lage des Punktes O auf seiner Bahn, folglich ist die Polkurve eine den Kreis K in $\mathfrak{P}$ berührende und zur Stange S parallele Gerade NN_1, welche zugleich als gemeinsame Polbahnentangente angesehen werden kann. Polkurve und Polbahn sind hiernach beide nur durch die Geschwigkeiten c und ω bestimmt; diese aber in den praktischen Anwendungen entweder direkt gegeben oder doch mit Hülfe der Daten jederzeit leicht zu berechnen.

Gewöhnlich sind nämlich folgende Elemente gegeben: die Erhebung h der Stange, die Zahl n der Umdrehungen der Welle pro Minute, also auch deren Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{n\pi}{30}$ und die Anzahl z der Schläge für jede Umdrehung der Welle. Dann ist $\frac{h}{c}$ die Zeit der Erhebung, und da der Pochstempel oder die Stange, bevor eine zweite Erhebung stattfindet, gefallen und auſserdem eine Ruhepause verflossen sein muſs, so kann man die Zeit zwischen Erhebungen $= \lambda \frac{h}{c}$ setzen, wobei λ in jedem speciellen Falle mit

Rücksicht darauf bestimmt werden mufs, ob ein elastischer Puffer den Hub begrenzt oder nicht. Während der Zeit $\lambda \frac{h}{c}$ mufs sich nun derjenige Centriwinkel auf dem äufsersten Begrenzungskreise der Daumen fortschieben, welcher zwischen zwei Daumen liegt und die Gröfse $\frac{2\pi}{z}$ hat; daher ist die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung $\omega = \frac{2\pi}{z} : \lambda \,.\, \frac{h}{c}$, womit $\frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} z h$, also durch die gegebenen Elemente bestimmt ist.

Hiernach kann man die Kurve, in welcher sich der Punkt A relativ gegen die rotirende Welle bewegt, so entstanden denken, dafs eine Gerade NN_1, mit welcher der Punkt A in fester Verbindung steht, sich ohne zu gleiten an dem Kreise K abwickelt; oder auch, da Polkurve und Polbahn vertauscht werden können, dafs der mit der fest liegenden Geraden NN_1 verbundene (also ruhende) Punkt A auf der Ebene des an dieser Geraden abrollenden Kreises K die betreffende Kurve verzeichnet. Sei hier die erstere Entstehungsart angenommen, so ergiebt sich aus derselben, dafs sämmtliche Punkte des bewegten Systems allgemeine Kreisevolventen beschreiben; nur die Bahnen der Punkte der Geraden NN_1 selbst sind gewöhnliche Kreisevolventen *).

Zur Bestimmung der Enveloppe für irgend eine zur Stange S, also auch zu NN_1 senkrechte Gerade,

---

*) Würde man beim Vertauschen der Polbahnen den Punkt A nicht mit der fest liegenden Geraden NN_1, sondern mit dem Kreise K verbinden, so erhielte man nicht eine Kreisevolvente, sondern eine Cycloide als Roulette. Diese Bemerkung lehrt, dafs man jeden Polbahnen-Mechanismus nicht allein zur Verzeichnung einer und derselben Kurve auf zwei verschiedene Arten, sondern auch zur Verzeichnung zweier verschiedener Kurven benutzen kann, je nachdem man den schreibenden Punkt mit der einen oder der anderen der Polbahnen verbindet.

z. B. AG, hat man nur nöthig, von dem Pol $\mathfrak{P}$ auf diese Gerade ein Perpendikel zu fällen, dessen Fufspunkt den Berührpunkt der Geraden und ihrer Enveloppe ergiebt. Diese Perpendikel fallen aber in jeder Lage mit NN_1 zusammen, und daraus ist klar, dafs jede dieser Enveloppen eine gewöhnliche Kreisevolvente ist. In den praktischen Anwendungen findet sich eine solche zur Stange S senkrechte Gerade als Hebelatte bei Pochstempeln vor, deren Daumen daher bei gleichförmiger Erhebung der Pochstempel immer durch eine gewöhnliche Kreisevolvente begrenzt sein müssen.

Nachdem so die Entstehungsart und die Natur der Bahnen der Punkte des bewegten Systems erkannt ist, wird zu ihrer specielleren Untersuchung der Wendekreis konstruirt. Dies ist hier möglich, weil man die Polbahnen kennt, also den Wendepol J_0 als den vierten harmonischen Punkt zum Krümmungsmittelpunkt O der Polbahn und zu dem Pol $\mathfrak{P}$ und dessen Gegenpunkt P in Bezug auf den Krümmungsmittelpunkt der Polkurve bestimmen kann*). Da aber der Krümmungsmittelpunkt von NN_1 und mit ihm P im Unendlichen liegt, so ist $\mathfrak{P}$ die Mitte zwischen O und J_0, d. h. der Wendekreis hat zum Durchmesser den Radius der Polbahn, ist also von konstanter Gröfse und liegt an der dem Kreise K entgegen gesetzten Seite der Polkurve NN_1.

---

*) Es ist wohl nicht überflüssig zu bemerken, dafs die Bestimmung des Wendekreises nicht nur dann möglich ist, wenn man die Polbahnen kennt, sondern auch ohne diese Kenntnifs, wenn die Rouletten zweier Punkte oder die Enveloppen zweier Kurven des bewegten Systems gegeben sind. Denn sind a und a' diese Punkte und m und m' die Krümmungsmittelpunkte ihrer Rouletten in diesen Punkten, so liefert der Schnittpunkt der Geraden am und $a'm'$ den Pol $\mathfrak{P}$. Auf am und auf $a'm'$ läfst sich ferner mit Anwendung der harmonischen Beziehung je ein Punkt des Wendekreises finden, so dafs also drei Punkte seiner Peripherie bekannt sind. In der Tangente des Wendekreises in $\mathfrak{P}$ hat man zugleich die gemeinsame Tangente der Polbahnen.

Hieraus geht sofort hervor, dafs nur die Bahnen derjenigen Punkte des bewegten Systems Wendepunkte besitzen können, welche in dem Parallelstreifen liegen, der durch die Polkurve NN_1 und die zu ihr durch den Wendepol J_0 gezogene Parallele begrenzt wird.

Um für irgend einen Punkt p (Fig. 3) dieses Parallelstreifens in der Entfernung a von NN_1 die Stelle zu bestimmen, an welcher seine Roulette einen Wendepunkt hat, denke man sich NN_1 in seine Anfangslage, nämlich in diejenige verlegt, in welcher O, p und der Pol $\mathfrak{P}$ auf derselben Geraden $O\mathfrak{P}_0 p_0$ liegen, und zeichne in dieser Lage den Wendekreis. Dann ziehe man durch p_0 eine Parallele zu NN_1, und fälle von den Schnittpunkten i und i' derselben mit dem Wendekreise Perpendikel auf NN_1, so sind deren Fufspunkte q und q' diejenigen Punkte, welche Pole werden müssen, damit die Roulette des Punktes p den Wendekreis schneide. Hiernach giebt es auf den betreffenden Kurven zwei symmetrisch zu $\mathfrak{P}_0 p_0$ gelegene Wendepunkte, die, wenn $a = R$ wird, in einen einzigen zusammen fallen. Die Kurvenstücke innerhalb des Wendekreises kehren dem Pol $\mathfrak{P}_0$ ihre konvexe Seite zu, die aufserhalb des Wendekreises ihre konkave Seite.

Der Winkel φ, um welchen der Pol $\mathfrak{P}_0$ aus seiner Anfangslage auf dem Kreise K fortrücken mufs, damit sich p gerade in dem Wendepunkte seiner Roulette befinde, läfst sich leicht aus der Konstruction bestimmen; es ist nämlich $\mathfrak{P}_0 q = R\varphi$, aber auch $\mathfrak{P}_0 q^2 = p_0 i^2 = i_0 p_0 \cdot p_0 \mathfrak{P}_0 = a(R-a)$, woraus sich $R^2\varphi^2 = a(R-a)$ ergiebt, mithin der gesuchte Winkel:

$$\varphi = \frac{\pm\sqrt{a(R-a)}}{R}.$$

Mit Hülfe des Wendekreises kann noch für jeden beliebigen Punkt des bewegten Systems der Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn konstruirt werden; man hat dazu nur nöthig, den betreffenden Punkt A (Fig. 2) mit dem Pole $\mathfrak{P}$ zu verbinden, diese Gerade bis zum Schnitt mit dem Wendekreis in J zu verlängern und zu J und $\mathfrak{P}$ und dessen Gegenpunkt P in Bezug auf A den vierten harmonischen als den verlangten Krümmungsmittelpunkt zu konstruiren. Für die Länge des Krümmungsradius ergiebt diese Konstruction:

$$AM = \frac{A\mathfrak{P}^2}{AJ}.$$

Zur Berechnung dieser Länge bezeichne φ den Winkel, um welchen der Pol aus seiner Anfangslage $\mathfrak{P}_0$ auf dem Kreise K bis zu der augenblicklichen Lage in $\mathfrak{P}$ fortgerückt ist, und α den Winkel zwischen der Normalen $A\mathfrak{P}$ und der Polkurve NN_1, so hat man, wenn $AG = a$ die Entfernung des Punktes A von NN_1 ist,

$$\mathfrak{P}G = \mathfrak{P}\mathfrak{P}_0 = R\varphi, \qquad A\mathfrak{P} = \sqrt{a^2 + R^2\varphi^2}$$

und

$$\mathfrak{P}J = \mathfrak{P}J_0 \,.\, \sin\alpha = R \,.\, \sin\alpha,$$

also weil $AJ = A\mathfrak{P} + \mathfrak{P}J$ ist, der Krümmungsradius

$$AM = \varrho = \frac{a^2 + R^2\varphi^2}{\sqrt{a^2 + R^2\varphi^2} + R\sin\alpha},$$

worin noch α durch φ zu ersetzen ist. Dazu ergiebt sich aus dem Dreieck $GA\mathfrak{P}$:

$$\sin\alpha = \frac{AG}{A\mathfrak{P}} = \frac{a}{\sqrt{R^2\varphi^2 + a^2}},$$

und hiermit endlich:

$$\varrho = \frac{\sqrt{a^2 + R^2\varphi^2}^{\,3}}{a^2 + aR + R^2\varphi^2}$$

als Function der Variablen φ.

In den praktischen Anwendungen wird vielfach nur ein sehr kurzes Stück einer der Kurven gebraucht, welches man meistens durch einen Kreisbogen ersetzen will. Für diesen Fall ist aber die Konstruction des Krümmungsmittelpunktes direkt aus den Daten des ursprünglichen Bewegungsproblemes von besonderem

Werthe. Man wird dann nämlich entweder nur den Krümmungsmittelpunkt für die mittlere Lage des Punktes A verzeichnen und diesen als den Mittelpunkt des die Daumenkurve mit genügender Genauigkeit ersetzenden Kreisbogens verwenden, oder mehrere Krümmungsmittelpunkte konstruiren und das zu benutzende Kurvenstück aus Kreisbogen zusammen setzen.

Aus dem oben berechneten Werthe des Krümmungsradius ϱ läſst sich noch die Bedingung für das Vorkommen von Wendepunkten angeben. Damit solche existiren, muſs:

$$a^2 + aR + R^2 \varphi^2 = 0$$

also:

$$\varphi = \frac{\pm \sqrt{-a(R+a)}}{R}$$

sein, welcher Werth nur dann reell ist, wenn a negativ, d. h. entgegengesetzt wie in Fig. 2 gerichtet und absolut genommen $a < R$ ist, was mit dem oben gefundenen Kriterium übereinstimmt.

Ein ganz specieller Fall verdient noch besondere Erwähnung, nämlich der, in welchem $a = R$ ist, bei welchem also die Richtung der Stange S durch den Mittelpunkt des Kreises K hindurch geht (Fig. 4). Verzeichnet man hier wiederum die Anfangslage der Polkurve NN_1, in welcher G in $\mathfrak{P}_0$ und A in O lag, und errichtet man in O zu $O\mathfrak{P}_0$ ein Perpendikel OV, welches zur Polarachse eines Polarkoordinatensystems mit dem Anfangspunkt O genommen werde, so ist, wenn $\angle \mathfrak{P} O \mathfrak{P}_0 = VOW = \varphi$ gesetzt wird, nach der Konstruction:

$$\mathfrak{P} G = \mathfrak{P} \mathfrak{P}_0 = R\varphi,$$

also auch:

$$OA = R\varphi.$$

OA ist aber der Radiusvector r des Punktes A zum Polarwinkel $VOW = \varphi$, mithin ist

$$r = R\varphi$$

die Polargleichung der Roulette des Punktes A, welche sich hiernach als eine archimedische Spirale mit der Polbahn als Grundkreis ergiebt. Da $A\mathfrak{P}$ Normale im Punkte A der Roulette ist, also $O\mathfrak{P}$ die Polarsubnormale, so folgt unmittelbar aus der Entstehungsart der archimedischen Spirale als Roulette, dafs ihre Polarsubnormale konstante Länge hat und zwar gleich dem Radius der Polbahn oder des Grundkreises.

Die Konstruction und Berechnung des Krümmungsradius ist genau dieselbe, wie im allgemeineren Falle; in dem Ausdruck für ϱ hat man nur $a = R$ zu setzen und erhält dann:

$$\varrho = \frac{\sqrt{R^2 + R^2\varphi^2}^3}{2R^2 + R^2\varphi^2},$$

oder mit Benutzung der Polargleichung $r = R\varphi$, und weil $A\mathfrak{P} = \sqrt{R^2 + r^2}$ die Länge u der Polarnormalen ist,

$$\varrho = \frac{u^3}{R^2 + u^2}.$$

Betrachtet man noch insbesondere die Bahnen sämmtlicher Punkte, welche auf einer mit der Stange S verbundenen, aber beliebig zu ihr gerichteten Geraden L liegen, so ist die Roulette eines Punktes, nämlich des Schnittpunktes mit NN_1, eine gewöhnliche Kreisevolvente, die eines zweiten, nämlich des Schnittpunktes mit dem zu S parallelen Durchmesser der Polbahn, eine archimedische Spirale, während alle übrigen Punkte der Geraden L allgemeine Kreisevolventen beschreiben.

Zwischen den Krümmungsmittelpunkten der von den einzelnen Punkten der Geraden L gleichzeitig beschriebenen Bahnelemente existirt nun die bemerkenswerthe Beziehung, dafs sie sämmtlich auf einem und demselben Kegelschnitt liegen, welcher von dem Wendekreis der umgekehrten Bewegung im augenblicklichen

Pole dreipunktig berührt wird *). Die Natur dieses Kegelschnittes ist abhängig von der Lage der Geraden L gegen den Wendekreis. Liegt nämlich L ganz aufserhalb des Wendekreises, so hat keine der gleichzeitigen Bahnen ihrer Punkte in diesem Augenblick einen Wendepunkt; keiner der Krümmungsmittelpunkte rückt also in's Unendliche, und der Kegelschnitt ist eine Ellipse. Berührt L den Wendekreis, so liegt einer der Krümmungsmittelpunkte im Unendlichen, nämlich derjenige, welcher zum Berührpunkt der Geraden L und des Wendekreises gehört, und der Kegelschnitt ist eine Parabel, deren Achse demjenigen Strahle des Büschels $\mathfrak{P}$ parallel ist, welcher durch den Berührpunkt der Geraden L mit dem Wendekreise hindurch geht. Schneidet endlich L den Wendekreis, so liegen die Krümmungsmittelpunkte dieser beiden Schnittpunkte im Unendlichen, und der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, deren Assymptoten denjenigen beiden Strahlen des Büschels $\mathfrak{P}$ parallel sind, welche nach den Schnittpunkten des Wendekreises und der Geraden L gezogen sind.

Wendet man diese Beziehungen auf sämmtliche durch einen und denselben Punkt gehende Gerade L an, so haben die ihnen entsprechenden Kegelschnitte die Polbahnentangente im augenblicklichen Pol zur gemeinsamen Tangente, ferner den Wendekreis der umgekehrten Bewegung zum gemeinschaftlichen Krümmungskreis im Pol $\mathfrak{P}$, und aufserdem gehen sie sämmtlich durch denjenigen Krümmungsmittelpunkt, welcher zu dem allen Geraden L gemeinsamen Punkte gehört.

---

*) Dieser Satz findet sich in *Mannheim, Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse dans son plan*; *Journal de l'École polyt., cahier 37, pg. 179*. In dieser Abhandlung wird auch nachgewiesen, dafs die Achsen des betreffenden Kegelschnitts den Hälftungslinien desjenigen Winkels parallel sind, den die Gerade L und die gemeinsame Tangente der Polbahnen einschliefsen.

Hiernach bilden die allen Geraden L entsprechenden Kegelschnitte ein Kegelschnittbüschel mit vier gemeinsamen Punkten, von denen drei unendlich nahe an einander liegen. Der Wendekreis der umgekehrten Bewegung ist übrigens auch einer dieser Kegelschnitte, nämlich derjenige, welcher allen auf den einzelnen Geraden L befindlichen, unendlich entfernten Punkten, also der unendlich entfernten Geraden der Ebene des bewegten Systems entspricht; und da es in einer Ebene nur eine unendlich entfernte Gerade giebt, so kann auch nur ein Kegelschnitt des Büschels ein Kreis sein. Unter den Geraden L können ferner nur zwei den Wendekreis berühren, woraus zu schliefsen ist, dafs unter all den Kegelschnitten nur zwei Parabeln vorkommen können. Die Achsen dieser beiden Parabeln stehen übrigens in dem besonderen Falle auch noch senkrecht zu einander, wenn der allen Geraden L gemeinsame Schnittpunkt im Unendlichen liegt, weil dann die den Parabelachsen parallelen Strahlen des Büschels $\mathfrak{P}$, welche nach den Berührpunkten der beiden parallelen Tangenten des Wendekreises gezogen werden können, als Schenkel eines auf dem Halbkreise stehenden Peripheriewinkels einen rechten Winkel einschliefsen.

Diese Sätze für die Krümmungsmittelpunkte derjenigen Bahnelemente, welche von den verschiedenen Punkten aller Strahlen eines Büschels gleichzeitig beschrieben werden, sind aber nicht blofs für den Fall richtig, dafs eine Gerade sich auf einem Kreise abwälzt, sondern auch dann noch, wenn zwei beliebig gestaltete Polbahnen auf einander abrollen. Denn die ganze Untersuchung gleichzeitiger Krümmungsmittelpunkte kann sich nur auf die Dauer von zwei Zeitelementen erstrecken, innerhalb welcher der augenblickliche Pol in seine unmittelbar folgende Lage gelangt. Während dieser Zeit und für die in derselben erfolgte Veränderung der Lage des Poles ist es aber für die Bewegungsverhältnisse vollständig gleichgültig, ob man die beiden Bogenelemente zweier beliebig gestalteten Polbahnen, oder die ihrer Krümmungskreise im augenblicklichen Berührpunkte, oder endlich ihre gemeinsame Tangente auf dem Bogenelement der Polbahn respective auf dem Bogenelement ihres Krümmungskreises abrollen läſst. Mit Rücksicht hierauf sind aber die obigen Sätze als allgemein gültig bewiesen zu betrachten. —

Es möge schlieſslich noch der Fall kurz behandelt werden, in welchem die Stange S (Fig. 5), deren Ende A durch den Daumen der Welle O erfaſst werde, um einen Punkt B drehbar sei. Die Winkelgeschwindigkeiten ω und ω', mit welchen die Rotationen um O und B erfolgen, werden beide als konstant und, wie gewöhnlich in den Anwendungen erforderlich ist, entgegengesetzt gerichtet vorausgesetzt. Man gebe beiden Systemen eine Drehung um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω, aber ihr entgegengesetzt gerichtet; dadurch kommt die Welle zur Ruhe, und das System vollführt seine Bewegung unter Einwirkung der beiden Winkelgeschwindigkeiten ω und ω'. B bewegt sich auf einem Kreise vom Halbmesser OB mit der Geschwindigkeit $\omega . OB$, während A zweien Geschwindigkeiten $\omega . OA$ senkrecht zu OA und $\omega' . BA$ senkrecht zu BA zu folgen hat. Aus diesen beiden könnte man die resultirende Geschwindigkeit und mit deren Hülfe den Pol finden. Indessen kommt man hier einfacher zum Ziele. Auf das bewegte System wirken zwei Drehungen um O und B als komponirende Pole, folglich läſst sich ein Punkt auf OB bestimmen, um welchen eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega + \omega'$ dieselbe Bewegung hervorbringt, wie beide Drehungen um O und B zusammen genommen. Dieser Punkt ist der Pol $\mathfrak{P}$; er theilt bekanntlich die Entfernung OB nach dem umgekehrten Verhältniſs der Winkelgeschwindigkeit und liegt im vorliegenden Fall zwischen O und B, so daſs

$$\mathfrak{P}B : \mathfrak{P}O = \omega : \omega'$$

ist. Da nun $\omega : \omega'$ konstant bleibt, so ändert auch $\mathfrak{P}$ seine Lage auf der konstanten Strecke OB nicht; und weil O ein fester Punkt ist, so ergiebt sich als Polbahn ein Kreis mit dem Radius $O\mathfrak{P}$. Es ist aber ebenso in der bewegten Ebene $B\mathfrak{P}$ konstant, folglich ist auch die Polkurve ein Kreis mit dem Radius $B\mathfrak{P}$ zu B als Mittelpunkt. Hiernach läſst sich die Bewegung des Punktes A darstellen als ein Rollen eines mit ihm verbundenen Kreises auf einem anderen festen Kreise. Die Rouletten sind also Epicycloiden und zwar gemeine, verschlungene oder gedehnte, je nachdem der sie beschreibende Punkt auf, auſserhalb oder innerhalb der Peripherie der Polkurve liegt.

Man findet jetzt den Wendepol J_0 als vierten harmonischen zu O zugeordneten Punkt zu $\mathfrak{P}$, P und O; er hat wegen der gegenseitig festen Lage von O, $\mathfrak{P}$ und B, also auch von O, $\mathfrak{P}$ und P zu einander ebenfalls eine feste Lage auf OB, und daher ist der Wendekreis während der ganzen Bewegung von konstanter Gröſse. Wird noch um B mit BJ_0 als Radius ein Kreis geschlagen, so ersieht man sofort, daſs nur diejenigen Rouletten Wendepunkte besitzen können, welche von Punkten des bewegten Systems beschrieben werden, die sich innerhalb des Kreisringes von der Breite $\mathfrak{P}J_0$ befinden. Diese Bedingung läſst sich mit Anwendung des Savary-Satzes auch leicht analytisch ausdrücken. Bezeichnet nämlich a den Radius $O\mathfrak{P}$ der Polbahn, b den Radius $B\mathfrak{P}$ der Polkurve und c die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkt der letzteren, so muſs für einen Wendepunkt

$$b > c > BJ_0$$

sein. Nun ist $BJ_0 = b - \mathfrak{P}J_0$ und nach dem Savary-Satze:

$$\frac{1}{\mathfrak{P}J_0} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab},$$

mithin:

$$BJ_0 = \frac{b^2}{a+b};$$

daher ist das Kriterium für das Vorhandensein eines Wendepunktes:

$$b > c > \frac{b^2}{a+b}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt der Epicycloide im Punkte A ergiebt sich auf die schon mehrfach ausgeführte Art, indem man die Normale $A\mathfrak{P}$, die den Wendekreis in J schneidet, über A hinaus um ihre eigene Länge bis P verlängert und zu P, $\mathfrak{P}$ und J den vierten harmonischen zu J zugeordneten Punkt konstruirt. Dieser ist der verlangte Krümmungsmittelpunkt M und daher MA der Krümmungsradius, dessen Länge aus der Konstruction leicht berechnet werden kann. Sei dazu der Wälzungswinkel $OBA = \varphi$ gesetzt und α der Winkel zwischen der gemeinsamen Polbahnentangente und der Normalen $A\mathfrak{P}$, so ist nach der Konstruction:

$$AM = \frac{A\mathfrak{P}^2}{AJ} = \frac{A\mathfrak{P}^2}{A\mathfrak{P} + \mathfrak{P}J}.$$

Aus dem Dreieck $\mathfrak{P}BA$ ergiebt sich:

$$A\mathfrak{P} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\varphi},$$

und aus dem Dreieck $\mathfrak{P}JJ_0$:

$$\mathfrak{P}J = \mathfrak{P}J_0 \sin(-\alpha) = -\frac{ab}{a+b}\sin\alpha,$$

und zwar ist α negativ zu setzen, weil der Winkel nach derjenigen Seite der Polbahnentangente hin gerichtet ist, nach welcher die Drehung nicht erfolgt. Nun ist noch α durch φ zu ersetzen. Dazu ergiebt sich aus dem Dreieck $\mathfrak{P}BA$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{c\sin\varphi}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\varphi}}$$

und hiermit wegen $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$:

$$\sin\alpha = \frac{b - c \,.\, \cos\varphi}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c \,.\, \cos\varphi}}$$

und endlich nach Substitution dieser Werthe:

$$A\,M = \frac{(a+b)\sqrt{(b^2 + c^2 - 2\,b\,c \,.\, \cos\varphi)^3}}{(a+b)\,(b^2 + c^2 - 2\,b\,c \,.\, \cos\varphi) - a\,b\,(b - c \,.\, \cos\varphi)}\,.$$

Für die gemeine Form der Epicycloide hätte man nur $c = b$ zu setzen, und dann ergiebt sich für deren Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{4\,b\,(a+b)\sin\frac{\varphi}{2}}{2\,b + a}\,.$$

II. Die Bewegung der Stange ist gleichförmig beschleunigt.

Wird die Daumenkurve, wie in den bisherigen Untersuchungen, der Bedingung entsprechend bestimmt, daſs die Bewegung der Stange eine gleichförmige sei, so ertheilt der Daumen in dem Augenblick, in welchem die Erhebung beginnt, der Stange ihre Geschwindigkeit in einem einzigen Moment, wodurch jede Erhebung mit einem Stoſse eingeleitet wird. Sowohl für die Festigkeit als auch für die Gleichförmigkeit in der Bewegung der Welle und der auf ihr befestigten Theile sind nun diese wiederholten Stöſse durchaus nachtheilig; es entsteht daher die Aufgabe, dieselben wo möglich gänzlich zu vermeiden; und dies kann nur dadurch geschehen, daſs man jede Erhebung als eine von der Ruhe ausgehende, beschleunigte Bewegung stattfinden läſst. Die

Beschleunigung wird, da Anderes erfordernde Bedingungen nicht vorliegen, konstant gesetzt; und diesem Bewegungsgesetze gemäſs soll nun die Daumenkurve gefunden werden.

Sei O (Fig. 6) der Mittelpunkt der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotirenden Welle, und S die Stange, auf welcher ein Punkt sich gleichförmig beschleunigt mit der Acceleration k bewege. Die Anfangslage dieses Punktes, in welcher er vom Daumen erfaſst wird und die Geschwindigkeit $= 0$ hat, sei A_0, seine augenblickliche Lage zur Zeit t, in welcher also seine Geschwindigkeit in der Richtung der Stange gleich kt ist, sei A. Zur Bestimmung des Poles gebe man wie früher beiden Systemen, der Welle und der Stange, eine Drehung um O mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich ω, aber ihr entgegengesetzt gerichtet. Hierdurch kommt die Welle zur Ruhe; die Stange S dagegen bewegt sich dann so, daſs sie die konstante Entfernung $OB = b$ von O beibehält, also einen Kreis vom Radius OB umhüllt, während der Punkt A auf ihr gleitet. Ein Ort für den Pol ist daher der Radius OB nach dem Berührpunkt B der Stange mit dem von ihr umhüllten Kreise. Ein zweiter Ort ergiebt sich durch Konstruction der resultirenden Geschwindigkeit AE des Punktes A, welche sich zusammensetzt aus $AC = kt$ in der Richtung der Stange und $AD = \omega \,.\, OA$ senkrecht zu OA. Errichtet man dann in A zu AE ein Perpendikel, so trifft dasselbe den Radius OB im augenblicklichen Pol $\mathfrak{P}$, dessen Entfernung von dem festen Punkte O aus den ähnlichen Dreiecken DAE und $AO\mathfrak{P}$ durch die Proportion:

$$O\mathfrak{P} : OA = kt : \omega \,.\, OA$$

mit:

$$O\mathfrak{P} = \frac{k}{\omega}\, t$$

gefunden wird. Hierin läſst sich die Zeit t noch durch eine Veränderliche von geometrischer Bedeutung ersetzen. Ist nämlich ϑ der noch zu bestimmende Winkel, um welchen sich in der Zeit t das System gegen eine noch zu bestimmende Gerade gedreht hat, so ist mit:

$$t = \frac{\vartheta}{\omega}$$

$$O\mathfrak{P} = \frac{k}{\omega^2}\,\vartheta.$$

Diese Gleichung lehrt, dafs die Polbahn eine archimedische Spirale mit dem Anfangspunkte O ist, deren Grundkreis den Radius $\frac{k}{\omega^2}$ hat, und deren Polarachse gegen $O\mathfrak{P}$ den Winkel ϑ einschliefst.

Um die Polkurve zu finden, wird durch A ein rechtwinkliges Achsensystem gelegt, und zwar die X-Achse stets mit der Stange S zusammenfallend. Bezeichnet man dann die bekannte Entfernung A_0B mit a, so sind die Koordinaten des Poles $\mathfrak{P}$:

$$x' = AB = AA_0 - A_0B = \tfrac{1}{2}kt^2 - a$$

$$y' = B\mathfrak{P} = O\mathfrak{P} - OB = \frac{k}{\omega}\,t - b,$$

woraus sich durch Elimination von t die Gleichung:

$$(y' + b)^2 = 2\,\frac{k}{\omega^2}\,(x' + a)$$

ergiebt. Durch parallele Verschiebung des Achsensystems, so dafs der neue Anfangspunkt W die Koordinaten $-a$ und $-b$ hat, und daher die X-Achse mit dem zur Stange S parallelen Durchmesser der Welle zusammenfällt, wird die Gleichung der Polkurve:

$$y^2 = 2\,\frac{k}{\omega^2}\,.\,x,$$

und dies ist die Scheitelgleichung einer Parabel mit der X-Achse als Achse und dem Parameter $\frac{k}{\omega^2}$ gleich dem Radius des Grundkreises der archimedischen Spirale.

Die den Daumen begrenzende Kurve kann hiernach beschrieben gedacht werden von einem Punkte, welcher fest verbunden ist mit einer Parabel, die auf einer archimedischen Spirale abrollt. Die Achse der Parabel geht dabei in jeder Lage durch den Anfangspunkt O der Spirale, welcher also eine Enveloppe des Systems ist.

Die die Polbahn und Polkurve bestimmende Gröfse $\frac{k}{\omega^2}$ hängt nur von den gegebenen Geschwindigkeitsverhältnissen ab und kann aus den Daten der Bewegung leicht berechnet werden. Ist nämlich h die ganze Erhebung der Stange, so ist die zur Erhebung erforderliche Zeit $= \sqrt{\frac{2h}{k}}$, mithin die Zeit, welche zwischen zwei Erhebungen verfliefsen mufs, $= \lambda \sqrt{\frac{2h}{k}}$, wobei λ dieselbe Bedeutung hat wie oben pg. 14. In dieser Zeit mufs sich auf dem äufsersten Begrenzungskreise der Daumen das Bogenstück zwischen zwei Daumen fortgeschoben haben, zu welchem bei z auf den Umfang der Welle vertheilten Daumen der Centriwinkel $\frac{2\pi}{z}$ gehört, so dafs sich für die Winkelgeschwindigkeit der Welle $\frac{2\pi}{z} : \lambda \sqrt{\frac{2h}{k}}$ und hiermit:

$$\frac{k}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} h z^2$$

ergiebt.

Auch durch Konstruction kommt man leicht zur Bestimmung von $\frac{k}{\omega^2}$. Im Pol $\mathfrak{P}$ haben nämlich Parabel und Spirale eine gemeinsame Tangente und Normale. Für die Parabel ist aber die Subtangente gleich der doppelten Abfsisse; trägt man daher WO nach WT hin ab, so ist $\mathfrak{P}T$ die den Polbahnen gemeinsame Tangente und das zu ihr errichtete Perpendikel $\mathfrak{P}L$

die gemeinsame Normale. Die Tangente $\mathfrak{P}T$ schneidet die Y-Achse in H, und das in H zu $\mathfrak{P}T$ errichtete Perpendikel die X-Achse im Brennpunkte G der Parabel, folglich mufs $WG = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega^2}$ sein. Als Kontrolle für die Richtigkeit der Konstruction mufs sich übrigens $OL = 2 . WG$ ergeben; denn OL ist für den Punkt $\mathfrak{P}$ der archimedischen Spirale die Polarsubnormale und daher gleich dem Radius des Grundkreises.

Zu Anfang der Erhebung, d. h. zur Zeit $t = 0$ ist sowohl $O\mathfrak{P} = 0$, als auch $x = 0$ und $y = 0$, woraus hervorgeht, dafs die archimedische Spirale in ihrem Anfangspunkt O den Scheitel W der Parabel berührt, und dafs hiernach der Bogen $W\mathfrak{P}$ der Parabel gleich dem Bogen $O\mathfrak{P}$ der Spirale sein mufs.

Jetzt läfst sich auch der Drehungswinkel ϑ finden, indem man nur nöthig hat, die Polarachse der archimedischen Spirale zu bestimmen. Zieht man zu diesem Zwecke durch L eine Parallele zu $O\mathfrak{P}$ bis zum Schnitt N mit einer durch $\mathfrak{P}$ parallel zur Stange S gezogenen Geraden, so ist LN Tangente zum Grundkreis der Spirale und senkrecht zu OL und zu $\mathfrak{P}N$ gerichtet. Die archimedische Spirale kann also entstanden gedacht werden durch Abrollen des Schenkels LN des rechten Winkels $\mathfrak{P}NL$ auf dem Kreise vom Radius OL (siehe pg. 18), und dann ergiebt sich die Anfangslage dieses Winkels und daraus die Polarachse auf die dort angegebene Art. Man trägt nämlich von L aus die Länge LN auf den Umfang des Grundkreises in der entsprechenden Richtung ab, zieht durch den Endpunkt dieses Bogens einen Radius und errichtet zu demselben im Mittelpunkt O des Grundkreises ein Perpendikel OV, welches die verlangte Polarachse ist und den Winkel $\vartheta = VO\mathfrak{P}$ liefert.

Zur Verzeichnung der Roulette des Punktes A bedarf man des Wendekreises, welcher wie folgt konstruirt werden kann. Eine Tangente desselben, nämlich die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}T$ der Polbahnen, ist bekannt, es handelt sich daher um Aufsuchung noch eines Punktes der Peripherie. Nun umhüllt die Gerade WO des bewegten Systems eine feste Kurve, die hier in einen Punkt O degenerirt ist; folglich mufs, wenn man $\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}O$ macht, K der noch nöthige Punkt des Wendekreises sein, welcher hiernach konstruirt und dazu benutzt werden kann, um den Krümmungsmittelpunkt entweder der Roulette oder irgend einer Enveloppe in derselben Weise zu bestimmen, wie dies bereits mehrfach ausgeführt wurde.

Der Wendekreis ändert im Laufe der Bewegung nicht nur seine Lage, sondern auch seine Gröfse. Dies letztere geht schon daraus hervor, dafs die Krümmungsradien der beiden Polbahnen, durch welche der Durchmesser des Wendekreises bestimmt ist, nicht konstant sind. Wie übrigens die Konstruction lehrt, ist der Durchmesser des Wendekreises gleich der Normalen $\mathfrak{P}L$ der Parabel, welche mit der Polarnormalen der archimedischen Spirale im Pole $\mathfrak{P}$ identisch ist, mithin dieser Durchmesser:

$$\mathfrak{P}J_0 = L\mathfrak{P} = \sqrt{O\mathfrak{P}^2 + OL^2} = \frac{k}{\omega^2}\sqrt{1 + \vartheta^2}.$$

Befindet sich der Pol im Scheitel der Parabel, so ergiebt sich wegen $\vartheta = 0$ der Durchmesser des Wendekreises für diese Lage $= \frac{k}{\omega^2}$, und denkt man sich den Wendekreis in allen Lagen gezeichnet, so werden nur diejenigen Punkte des bewegten Systems Rouletten mit Wendepunkten beschreiben können, welche innerhalb des Streifens liegen, der von der Parabel einerseits und von der Einhüllenden der Wendekreise andererseits begrenzt wird.

Von der Berechnung des Krümmungsradius in irgend einem Punkte einer Roulette mag hier Abstand genommen werden; in jedem konkreten Falle führt ja eine Konstruction leicht und schnell zu dessen Bestimmung. Auch handelt es sich hier hauptsächlich darum, den Werth der kinematisch-geometrischen Methode für die Mechanismen und für die rein geometrische Behandlung von Bewegungsproblemen dadurch zu zeigen, daſs diese Methode alle Verhältnisse der zu untersuchenden Bewegung durch eine Zeichnung sofort klar übersehen läſst und gewissermaſsen den Mechanismus der Bewegung aufdeckt. Es genügt aber für diesen Zweck nachgewiesen zu haben, daſs und wie man für jede Lage der bewegten Theile die gesuchten Kurven wirklich verzeichnen, deren Tangenten, Normalen und Krümmungsmittelpunkte nur mit den Daten der bekannten und der verlangten Bewegung konstruiren und für jeden Punkt seine augenblickliche Geschwindigkeit angeben kann. Letzteres ist dadurch möglich, daſs für die Dauer eines Zeitelements die Bewegung durch eine einfache Drehung um den augenblicklichen Pol ersetzt werden kann, und daher zur Bestimmung der Geschwindigkeit irgend eines Punktes nur die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung mit dem Abstand des betreffenden Punktes vom Pol zu multipliciren ist.

Eine sonst schwierig zu beantwortende Frage, die auch für die Anwendungen nicht unwichtig ist, läſst sich durch die kinematische Behandlung leicht entscheiden.

Bekanntlich tritt bei der Bewegung eines Körpers auf der Oberfläche eines anderen eine von dem zu den Berührungsflächen normalen Drucke abhängige Reibung auf, die entweder eine gleitende oder eine rollende sein kann. Letztere ist im Verhältniſs zur ersteren verschwindend klein, ja man kann sie theoretisch vollständig gleich Null setzen. Wenn nun auch bei der Bewegung eines Punktes, die bisher meistens behandelt wurde, von Reibung nicht wohl die Rede sein kann, so ist doch in den wirklichen hier einschlagenden Ausführungen der bewegte Punkt entweder durch das Ende, also die Grundfläche einer Stange oder durch eine abgerundete Kante, also immerhin durch eine Körperoberfläche, wenn auch von geringer Ausdehnung, ersetzt, eine Reibung also jedenfalls möglich. So aufgefafst ist die Bewegung aller Punkte des bewegten Systems auf ihren Rouletten ein reines Gleiten, während die Bewegung der Umhüllenden auf ihren Enveloppen aus Gleiten und Rollen zusammengesetzt, also mit gleitender und rollender Reibung verbunden ist. Nur die Bewegung der Polbahnen gegen einander ist ein reines Rollen und somit als frei von Reibung zu betrachten. Es liegt daher die Frage nahe, ob man nicht die Polbahnen selbst zur Uebertragung der Bewegung anwenden könnte?

Die Bewegungsübertragung bei den hier untersuchten Mechanismen findet nun in Wirklichkeit in der Weise statt, dafs die Polbahn um den Mittelpunkt O der Welle gleichförmig rotirt und die Ebene der Polkurve in der unveränderlichen Richtung der Stange verschiebt. Dieses Verschieben oder Treiben kann aber beim Vorhandensein von Bewegungshindernissen (Ueberwindung der Schwere, der Reibung in den Führungen etc.) nur dann erfolgen, wenn die von dem festen Rotationsmittelpunkte O ausgehenden Radiivectoren der Polbahn, welche in der Richtung der Drehung aufeinander folgen, kontinuirlich wachsen*). Nun war für die gleichförmige Bewegung in der Richtung der Stange die Polbahn ein Kreis mit dem Mittelpunkt als Anfangspunkt; die in dem Sinne der Drehung

---

*) Analytisch wäre diese Bedingung so auszudrücken, dafs, wenn $r = f(\vartheta)$ die Polargleichung der Polbahn ist in Bezug auf den festen Punkt O als Anfangspunkt, $\frac{dr}{d\vartheta}$ für wachsende ϑ stets positiv sein müfste, wobei die ϑ in der Richtung der Drehung zu zählen sind.

aufeinander folgenden Radiivectoren haben daher in diesem Falle konstante Länge gleich dem Radius des Kreises, d. h. es kann die Bewegungsübertragung durch das Abrollen der Polbahnen selbst nicht erfolgen. Dagegen ist es im Falle der gleichförmig beschleunigten Bewegung der Stange wohl möglich die Polbahn zum Treiben zu benutzen, weil ja der Radiusvector der Polbahn die Länge $\frac{k}{\omega^3}\vartheta$ hat, also mit dem Drehungswinkel in der Richtung der Drehung diesem proportional wächst.

So bietet die gleichförmig beschleunigte Bewegung der Stange nicht allein den Vortheil, daſs der Stoſs bei Beginn jeder Erhebung vollständig vermieden werden kann, sondern auch die Möglichkeit, die Bewegungsübertragung ohne Reibung, wenigstens ohne gleitende Reibung, vor sich gehen zu lassen*). Denn um dies zu erreichen, hat man nur nöthig, dem Daumen die Begrenzung durch ein Bogenstück der archimedischen Spirale und der Hebelatte die Begrenzung nach dem zugehörigen Parabelbogenstück zu geben, was auch praktisch sehr wohl ausführbar ist.

Die archimedische Spirale ist bereits als Roulette erkannt und oben pg. 18 gezeigt worden, wie deren Tangente, Normale und Krümmungsmittelpunkt in jedem Punkte konstruirt werden kann; es erübrigt daher nur noch auch für die Parabel diese Konstructionen anzugeben.

Nun ist aber die Parabel Enveloppe des einen

*) Es ist hier zu bemerken, daſs im Grunde genommen die Reibung nicht ganz und gar verschwunden, sondern nur an eine andere, geeignetere Stelle versetzt ist. Denn da die Radiivectoren kontinuirlich wachsen, so üben sie einen Druck senkrecht gegen die Längenrichtung der Stange aus, wodurch eine entsprechende Reibung in ihren Führungen hervorgebracht wird. Diese würde sich aber durch Anordnung einer Rollenführung auf ein Minimum reduciren lassen.

Schenkels eines rechten Winkels, wenn dessen Scheitel eine feste Gerade (die Scheiteltangente) durchläuft und der andere Schenkel stets durch einen festen Punkt (den Brennpunkt) hindurchgeht; und diese Entstehungsart der Parabel macht es möglich, die kinematisch-geometrische Methode für die verlangten Konstructionen zu benutzen.

Sei dazu FGH (Fig. 8) der rechte Winkel, dessen Scheitelpunkt G beständig auf der festen Geraden SS gleitet, während der Schenkel GF immer durch den festen Punkt F hindurch geht. Da GF eine feste Kurve, hier den Punkt F umhüllt, so liegt der Pol $\mathfrak{P}$ auf dem in F zu FG errichteten Perpendikel; und weil G die Gerade SS durchläuft, so mufs auch das in G zu SS errichtete Perpendikel den Pol enthalten und daher das erste Perpendikel in demselben schneiden. Fällt man nun von $\mathfrak{P}$ das Loth $\mathfrak{P}A$ auf GH, so ist A der Berührpunkt zwischen GH und der Parabel und $A\mathfrak{P}$ die Normale der Parabel, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt liegen mufs. Zur Bestimmung desselben ist der Wendekreis zu konstruiren, und dies kann hier mit Beachtung der Anmerkung auf Seite 15 geschehen; denn man kennt eine Enveloppe des bewegten Systems, nämlich den Punkt F, und eine Roulette, die Gerade SS. Da der Punkt G eine Gerade durchläuft, von der jeder Punkt einen unendlich entfernten Krümmungsmittelpunkt hat, so ist G selbst ein Punkt des Wendekreises; und macht man $\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}F$, so liegt auch K auf dem Wendekreise; derselbe ist daher durch die drei Punkte $\mathfrak{P}$, G und K bestimmt. Sein Schnittpunkt mit SS ist übrigens der Wendepol J_0, welcher mit $\mathfrak{P}$ verbunden die Normale der für die hier beabsichtigten Konstructionen nebensächlichen Polbahnen liefert.

Um nun den Krümmungsmittelpunkt der Parabel in A zu erhalten, bedenke man, dafs dieselbe von einer

Geraden eingehüllt wird, also denselben Krümmungsmittelpunkt hat, wie die Roulette des unendlich entfernten Krümmungsmittelpunktes der Geraden selbst. Konstruirt man daher den Wendekreis der umgekehrten Bewegung, so ergiebt sich in seinem Schnittpunkte mit der Normalen $A\mathfrak{P}$ der verlangte Krümmungsmittelpunkt M *). Diese Konstruction läſst sich aber auch für jeden Punkt der Parabel in Fig. 6 ausführen; denn in derselben ist durch die Daten der Bewegung nicht nur die feste Gerade, sondern auch der feste Punkt und der rechte Winkel bekannt, dessen einer Schenkel die Parabel umhüllt; und hiernach ist in jedem Falle die kinematische Konstruction ermöglicht.

III. Die Bewegung der Stange ist periodisch veränderlich.

Die bisher untersuchten Bewegungen waren solche, wie sie insbesondere für Hebedaumen verlangt werden, und bei welchen nur der eine Theil der hin- und hergehenden Bewegung durch die rotirende Welle veranlaſst wird. Soll dagegen die Bewegung der Stange in beiden Richtungen durch den Antrieb der Welle hervorgebracht werden und auſserdem periodisch veränderlich sein, so befestigt man auf der Welle ein

*) In ähnlicher Weise lassen sich die kinematischen Konstructionen auch für die beiden anderen Kegelschnitte, Ellipse und Hyperbel, benutzen, indem man sie als Enveloppen des einen Schenkels eines rechten Winkels betrachtet, dessen Scheitelpunkt die Peripherie eines festen Kreises durchläuft, während der andere Schenkel stets durch einen festen, innerhalb (Ellipse) oder auſserhalb (Hyperbel) des Kreises gelegenen Punkt hindurchgeht.

Excentrik, d. i. eine am Umfang meist kontinuirlich gekrümmte Scheibe, welche von einem entsprechend gestalteten Theile der Stange fortwährend berührt wird.

Die Periodicität der Bewegung soll in einer derartigen Ab- und Zunahme der Geschwindigkeit bestehen, daſs sie zu Anfang und zu Ende eines jeden Hin- und Hergangs gleich Null und in der Mitte jedes Schubes am gröſsten ist, mithin auch bei der Umwechselung der Richtung der Bewegung Stöſse nicht vorkommen können.

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn man der Stange, resp. einem Punkte derselben die Geschwindigkeit $a \, . \cos \vartheta$ giebt, wobei $\vartheta = 0$ für die Mitte des Hubes, dagegen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ für Anfang und Ende desselben genommen, also zu beiden Seiten einer noch zu bestimmenden festen Geraden zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gezählt werden muſs; a ist dann die gröſste Geschwindigkeit für die Mitte eines jeden Schubes.

Sei nun O (Fig. 7) der Mittelpunkt der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotirenden Welle und S die Stange, auf welcher der Punkt A augenblicklich die Geschwindigkeit $AC = a \, . \cos \vartheta$ habe. Giebt man der Welle und der Stange eine gemeinsame der Drehung der Welle entgegengesetzte Drehung, aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω, so kommt dadurch die Welle zur Ruhe, die Stange umhüllt dagegen einen Kreis vom Radius OB gleich ihrem Abstand von dem Wellenmittelpunkt O, während der Punkt A den beiden Geschwindigkeiten $AC = a \, . \cos \vartheta$ in der Richtung von S und $\omega \, . \, OA$ senkrecht zu OA zu folgen hat, aus welchen sich die resultirende Geschwindigkeit und Tangente seiner Bahn AE ergiebt. Das in A zu AE errichtete Perpendikel, welches den zu S senkrechten Radius in $\mathfrak{P}$ schneidet, liefert in $\mathfrak{P}$ den augenblicklichen Pol, so dafs $A\mathfrak{P}$ die Normale der Bahn des Punktes A sein mufs. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $AO\mathfrak{P}$ und AED ist:

$$O\mathfrak{P} : OA = a \,.\, \cos\vartheta : \omega \,.\, OA$$

mithin:

$$O\mathfrak{P} = \frac{a}{\omega} \,.\, \cos\vartheta.$$

Dies ist die Polargleichung eines Kreises vom Durchmesser $\frac{a}{\omega}$, zu welcher der durch O gehende Durchmesser Polarachse und O selbst Anfangspunkt ist.

Zur Bestimmung der Polkurve werde ein rechtwinkliges Achsensystem in deren Ebene angenommen, die X-Achse mit dem zu S parallelen Durchmesser der Welle zusammenfallend, die Y-Achse durch A hindurchgehend. Die Koordinaten von $\mathfrak{P}$ sind dann:

$$x = \mathfrak{P}Q = BA; \; y = O\mathfrak{P}.$$

Vertheilt sich wie gewöhnlich der Hub symmetrisch zu beiden Seiten des Wellenmittelpunktes O, so ist:

$$BA = \int_0^{\vartheta} a \,.\, \cos\vartheta \,.\, dt$$

oder wegen $d\vartheta = \omega \,.\, dt$, also $dt = \frac{d\vartheta}{\omega}$

$$BA = \frac{a}{\omega} \int_0^{\vartheta} \cos\vartheta \,.\, d\vartheta, \text{ also}$$

$$x = \frac{a}{\omega} \sin\vartheta \text{ und } y = \frac{a}{\omega} \cos\vartheta;$$

mithin ist die Gleichung der Polkurve:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\omega}\right)^2$$

die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt W liegt, und dessen Radius daher $W\mathfrak{P} = \frac{a}{\omega}$ ist.

Hierdurch ist aber auch die Lage der Polbahn vollständig bestimmt, da den schon bekannten Peripheriepunkten O und $\mathfrak{P}$ derselben der Punkt W als dritter hinzugefügt ist. Es rollt daher der innere Umfang eines Kreises vom Radius $\frac{a}{\omega}$ auf dem äuſseren Umfang eines halb so groſsen ab, und die entstehenden Rouletten sind gemeine, verschlungene oder gedehnte Pericycloiden, je nachdem der schreibende Punkt auf der Peripherie der Polkurve oder innerhalb oder auſserhalb derselben liegt.

Die Y-Achse schneidet die Polbahn in Q, und da nun im Verlaufe der Bewegung der Anfangspunkt W des Koordinatensystems auf der Peripherie des festen Kreises bleibt, und die X-Achse fortwährend durch den festen Punkt O hindurchgeht, so muſs die Y-Achse immer denselben Punkt Q, nämlich den Endpunkt des festen Durchmessers OQ enthalten. Dann ist aber in jeder Lage des bewegten Systems $O\mathfrak{P} = OQ.\cos QO\mathfrak{P} = \frac{a}{\omega}.\cos QO\mathfrak{P}$, mithin ist $\angle QO\mathfrak{P}$ der Winkel ϑ und OQ die feste Gerade, von der aus zu beiden Seiten die Winkel ϑ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu messen sind.

Der Wendekreis ist ein der Polbahn kongruenter, an der entgegengesetzten Seite der gemeinsamen Tangente der Polbahnen gelegener Kreis, und daher die Polbahn selbst der Wendekreis der umgekehrten Bewegung. Denn trägt man auf der Verlängerung von $O\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{P}$ hinaus die Strecke $\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}O$ auf, so ist K schon ein Punkt des Wendekreises, weil ja die im bewegten System befindliche Gerade WX eine feste Kurve, hier den Punkt O umhüllt. Ferner trifft das in K zu $\mathfrak{P}K$ errichtete Perpendikel die gemeinsame Normale der Polbahnen im Wendepol J_0, so daſs die Dreiecke $\mathfrak{P}WO$ und $\mathfrak{P}KJ_0$, mithin auch deren umschriebene Kreise, nämlich die Polbahn und der Wendekreis, kongruent sind.

Wendepunkte können hiernach nur auf denjenigen Rouletten vorkommen, welche von Punkten beschrieben werden, deren Abstand vom Mittelpunkt W des rollenden Kreises zwischen $\frac{a}{\omega}$ und $2\frac{a}{\omega}$ liegt.

Die Konstruction des Krümmungsmittelpunktes M des Bahnelements in A wird, da der Wendekreis bekannt ist, in der früher angegebenen Art ausgeführt, indem man zu $\mathfrak{P}$, dessen Gegenpunkt in Bezug auf A und zu J den zu J zugeordneten vierten harmonischen Punkt M bestimmt. Die Länge des Krümmungsradius läfst sich auf Grund dieser Konstruction leicht berechnen. Nach derselben ist nämlich

$$AM = \frac{A\mathfrak{P}^2}{AJ} = \frac{A\mathfrak{P}^2}{A\mathfrak{P} + \mathfrak{P}J}.$$

Wenn man nun den Durchmesser der Polbahn und Radius der Polkurve mit d und die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkt der Polkurve mit c bezeichnet, so ergiebt sich zunächst aus dem Dreieck $AW\mathfrak{P}$

$$A\mathfrak{P} = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\,.\cos\vartheta}$$

und aus dem Dreieck $\mathfrak{P}JJ_0$

$$\mathfrak{P}J = \mathfrak{P}J_0\,.\sin\alpha = d\,.\sin\alpha,$$

unter α den Winkel der Normalen $A\mathfrak{P}$ mit der gemeinsamen Tangente der Polbahnen verstanden. Da aber im Dreieck $AW\mathfrak{P}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) : \sin\vartheta = c : A\mathfrak{P}, \text{ also}$$

$$\sin\alpha = \frac{d - c\,.\cos\vartheta}{\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\,.\cos\vartheta}}$$

und daher

$$\mathfrak{P}J = \frac{d\,(d - c\,.\cos\vartheta)}{\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\,.\cos\vartheta}}$$

VITA.

Samuel Martin Schoenflies natus sum Landsbergiae in oppido Brandenburgensi anno MDCCCXL patre Maurico matre Johanna e gente Hirschfeld, qui quod adhuc vivunt maxime laetor. Vere anni MDCCCLVII maturitatis testimonio instructus sum. Deinde quum quatuor annos in officinis versatus essem, insequentium quatuor annorum singulos Berolini, Tiguri, Carlsruhe ad academiam technicam degi. Perfectis studiis primum et technico et magistri munere functus sum, tum Berolini examen rigorosum sustinui, quo facto Potsdamiae in regia schola technica magister legitime constitutus sum, ubi nunc quoque versor.

Hi autem me docuerunt:

Berolini Aronhold, Hansen, Manger, Pohlke, Weyerstraſs, Weber, Wiebe.

Tiguri Christoffel, Clausius, Lübke, Reuleaux, Scherr, Visher, Zeuner.

Carlsruhe Baumgarten, Grashof, Hart, Sternberg.

Praeceptorum omnium grata memoria apud me semper servabitur, imprimis autem Aronhold professori, quod saepenumero ad excercitationes mathematicas me incitavit, magno opere gratias ago.

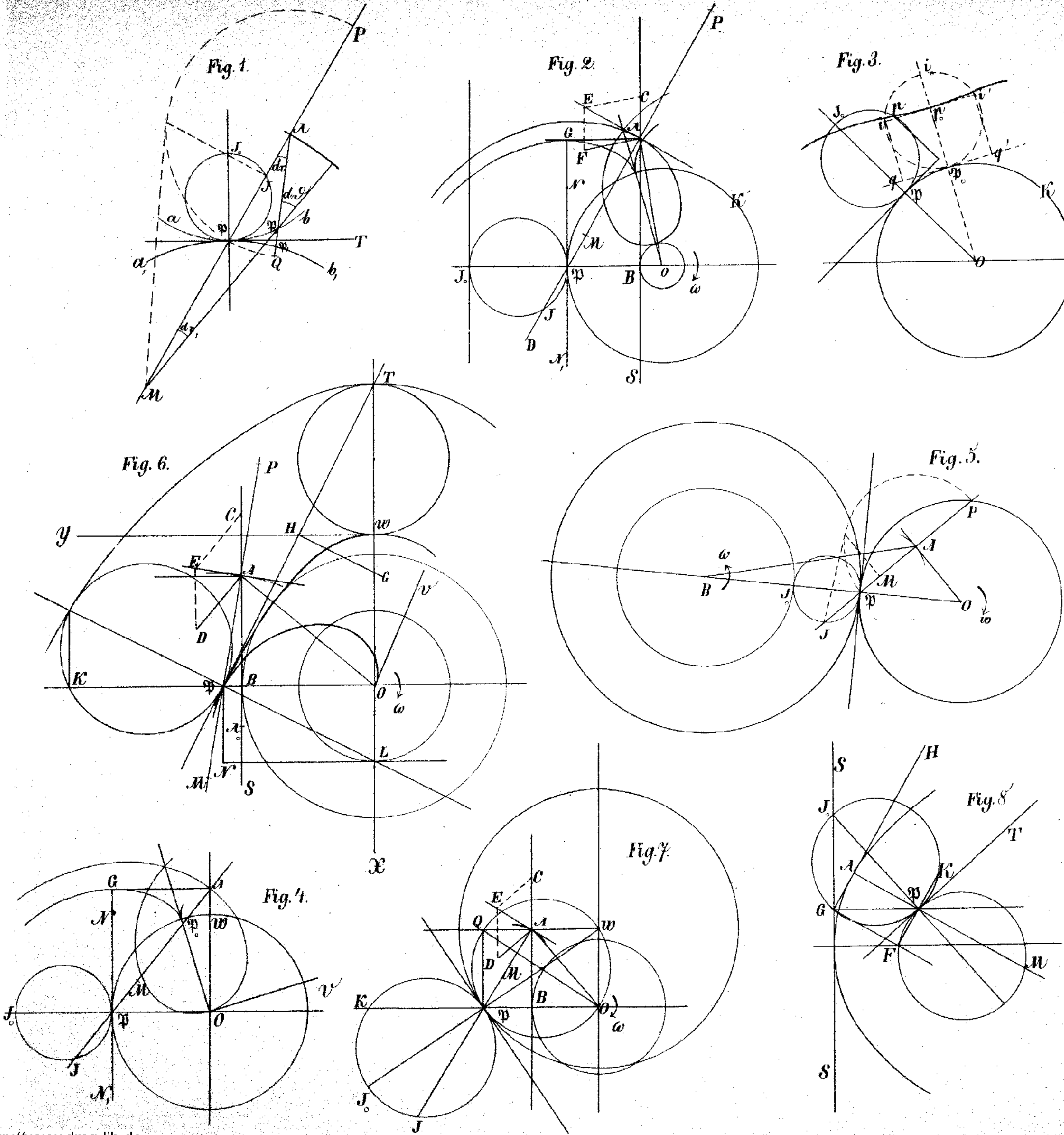
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.